Abschätzungen der zahlentheoretischen Funktion g(n)

Kanold, Hans-Joachim

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 28, 1977, S.65-68

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Abschätzungen der zahlentheoretischen Funktion g(n)

Von **Hans-Joachim Kanold,** Braunschweig

Die zahlentheoretische Funktion g(n) von E. Jacobsthal ist der Maximalabstand zweier aufeinanderfolgender zu n teilerfremder natürlicher Zahlen. Diese Funktion ist in den letzten Jahren mehrfach untersucht worden ([2] und die dort angegebene Literatur). Wir wollen für diese Note einige Bezeichnungen einführen. Es seien

$$(1) \qquad p_1, p_2, \dots, p_k$$

Primzahlen. Ferner seien

$$(2) \qquad n = p_2 p_3 \dots p_k;\ p_2 < p_3 < \dots p_k;\ (p_1, n) = 1.$$

Nach Jacobsthal ist

$$(3) \qquad k + \frac{k}{p_1 - 1} \leqq k + 1 + \left[\frac{k-1}{p_1 - 1}\right] = K_{p_1} \leqq g(p_1 n).$$

Wir beweisen nun

Satz 1. *Aus* $K_{p_1} \leqq p_2$ *folgt* $g(p_1 n) = K_{p_1}$;
aus $k \leqq p_2$ *folgt* $g(p_1 n) \leqq K_{p_1} + \varepsilon k$ *für jedes vorgegebene* $\varepsilon > 0$ *und* $k \geqq max\{e^4; e^{\frac{2}{\varepsilon}}\}$.

Beweis. Wegen der Voraussetzung $k \leqq p_2$ ist

$$(4) \qquad g(n) = k.$$

Für $p_1 = 2$ gilt bekanntlich [2]

$$(5) \qquad \begin{aligned} &g(p_1 n) = g(2n) = 2\,g(n) = 2k; \\ &K_2 = k + 1 + k - 1 = 2k. \end{aligned}$$

Somit ist für $p_1 = 2$ alles bewiesen. Sei jetzt $p_1 \geqq 3$. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen die Existenz einer natürlichen Zahl a an, so daß

$$(6) \qquad (a, p_1 n) = 1$$

gilt, und kein Element von

$$(7) \qquad \mathbb{A} = \{a+1, a+2, \dots, a+h\}$$

zu $p_1 n$ teilerfremd ist. Dabei soll gelten:

$$(8) \qquad \begin{aligned} &h = K_{p_1} \text{ für } K_{p_1} \leqq p_2; \\ &h = K_{p_1} + [\varepsilon k] \text{ für } k \leqq p_2. \end{aligned}$$

Höchstens $1 + \left[\frac{h-1}{p_\varkappa}\right]$ Elemente von A sind durch $p_\varkappa$ ($\varkappa = 1, \dots, k$) teilbar. Damit erhalten wir

$$(9) \qquad k + \sum_{\varkappa = 1}^{k} \left[\frac{h-1}{p_\varkappa}\right] \geqq h.$$

Ist nun zunächst

$$(8') \qquad h = K_{p_1} \leqq p_2,$$

dann ist $\left[\frac{h-1}{p_\varkappa}\right] = 0$ für $\varkappa \geqq 2$. Also ergibt sich aus (9)

$$(10) \qquad k + \tfrac{h-1}{p_1} \geqq h;$$

nach (3) ist dann aber auch

$$(11) \qquad k \geqq \tfrac{1}{p_1} + (1-\tfrac{1}{p_1})\,h \geqq \tfrac{1}{p_1} + (1-\tfrac{1}{p_1})\,(k + \tfrac{k}{p_1-1}),$$

woraus der Widerspruch ersichtlich ist. Für den weiteren Beweis setzen wir

$$(12) \qquad k \leqq p_2;\; h = k+1+\left[\tfrac{k-1}{p_1-1}\right] + [\varepsilon k] \geqq k(1+\tfrac{1}{p_1-1}) + [\varepsilon k]$$

voraus. Aus der Formulierung des Satzes sehen wir, daß wir o.B.d.A.

$$(13) \qquad \varepsilon \leqq \tfrac{1}{2}$$

annehmen dürfen. Das führt zu

$$(14) \qquad h-1 \leqq k + \left[\tfrac{k-1}{2}\right] + \left[\tfrac{k}{2}\right] = 2k-1;\; \left[\tfrac{h-1}{p_2}\right] \leqq 1.$$

Aus (9) ergibt sich

$$(15) \qquad \pi(h-1) - \pi(k-1) \geqq h-k-\left[\tfrac{h-1}{p_1}\right].$$

Nach Rosser-Schoenfeld [1] gilt nun

$$(16) \qquad \pi(h-1) < \tfrac{h-1}{\log(h-1)}(1+\tfrac{1,5}{\log(h-1)});\; \pi(k-1) > \tfrac{k-1}{\log(k-1)} > \tfrac{k-1}{\log k}$$

Damit folgt aus (15) auch

$$(17) \qquad \begin{aligned} &(k-1)\,(1-\tfrac{1}{\log k}) \geqq (h-1)\,(1-\tfrac{1}{p_1}-\tfrac{1}{\log(h-1)}-\tfrac{1,5}{\log^2(h-1)}) \\ &\geqq (k+\left[\tfrac{k-1}{p_1-1}\right]+[\varepsilon k])\,(1-\tfrac{1}{\log k}-\tfrac{1}{p_1}-\tfrac{1,5}{\log^2 k}). \end{aligned}$$

Beachten wir noch $\left[\frac{k-1}{p_1-1}\right] \geqq \frac{k}{p_1-1} - 1$, so erhalten wir

$$(17') \qquad \tfrac{1,5}{\log k}(1-\tfrac{1}{k}) + (1+\tfrac{1,5}{\log k})\,(\tfrac{1}{p_1-1}+\varepsilon-\tfrac{1}{k}) + (1-\tfrac{2}{p_1})\,\tfrac{\log k}{k} > (1-\tfrac{1}{p_1})\,\varepsilon \log k.$$

Hieraus sehen wir, daß für alle hinreichend großen k ein Widerspruch folgt: Die linke Seite strebt für $k \to \infty$ gegen $\frac{1}{p_1-1}+\varepsilon$, die rechte Seite wegen $\varepsilon \log k \geqq 2$ gegen $2-\frac{2}{p_1}$. Für $\varepsilon \leqq \frac{1}{2}$, $3 \leqq p_1$ ist aber $\frac{1}{p_1-1}+\varepsilon \leqq 1 < 2-\frac{2}{3}$. Nun wollen wir genauer abschätzen. Wir sehen, daß aus (17′) auch

$$(17'') \qquad \tfrac{1,5}{\log k} + (1+\tfrac{1,5}{\log k})\,(\tfrac{1}{p_1-1}+\varepsilon) + \tfrac{\log k}{k} > (1-\tfrac{1}{p_1})\,\varepsilon \log k \geqq (1-\tfrac{1}{p_1})\,2$$

folgt. Aus

$$(18) \qquad \varepsilon \leqq \tfrac{1}{3}$$

erhalten wir wegen $2 \leqq \varepsilon \log k \leqq \frac{\log k}{3}$

$$(19) \qquad k \geqq e^6.$$

Jetzt liefert (17″) den Widerspruch

(20) $\frac{1,5}{6} + (1 + \frac{1,5}{6})\,(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + \frac{6}{e^6} > \frac{4}{3}.$

Damit dürfen wir

(21) $\frac{1}{3} < \varepsilon \leqq \frac{1}{2}$

voraussetzen. Nun ergibt

(22) $k \geqq e^{6,9};\ \ \varepsilon \log k > 2,3$

nach (17″) den Widerspruch

(23) $\frac{3}{6,9} + \frac{6,9}{e^{6,9}} > \frac{1,6}{3}.$

Somit bleibt noch

(24) $k < e^{6,9} < 993.$

Nach (14) und (15) erhalten wir

(25) $\pi(2k-1) - \pi(k-1) \geqq \pi(h-1) - \pi(k-1) \geqq h - k - \left[\frac{h-1}{p_1}\right].$

Nach (12) und (21) wird

(26) $h - k - \left[\frac{h-1}{p_1}\right] \geqq \frac{k}{p_1 - 1} + [\varepsilon k] > \left[\frac{k}{3}\right] \geqq \frac{k-2}{3}.$

Somit brauchen wir nur noch

(27) $\pi(2k-1) > \pi(k-1) + \frac{k-2}{3}$

zu diskutieren. Mit (24) gewinnen wir $\pi(2k-1) \leqq \pi(1983) = 299$.

Für $k \geqq 572$ folgt $\pi(k-1) \geqq 105$ und

(28) $194 > \frac{k-2}{3};\ \ k \leqq 583.$

Durch Wiederholung dieser Schlüsse gelingt es, die Schranke für k unter e^4 hinabzudrücken. Damit ist Satz 1 bewiesen. Wir wählen dann $\varepsilon = 0,5$ und beweisen den

Satz 2. *Aus* $k \leqq p_2$ *folgt* $g(p_1 n) \leqq K_{p_1} + [0,5\,k] \leqq 2k = g(p_1)g(n)$, *mit den einzigen Ausnahmen* $p_1 = 3$, $n = 5 \cdot 7 \cdot p_4 \cdot p_5$ *und* $n = 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot p_6 \cdots p_{11}$.

Beweis. Nach Satz 1 und (5) dürfen wir annehmen

(29) $3 \leqq p_1;\ \ k \leqq 54.$

Nach (12) und (15) ergibt sich

(30) $$\pi(2k-1) \geqq \pi\left(k + \left[\frac{k-1}{p_1-1}\right] + \left[\frac{k}{2}\right]\right) \geqq$$
$$\pi(k-1) + 1 + \left[\frac{k-1}{p_1-1}\right] + \left[\frac{k}{2}\right] - \left[\frac{k + \left[\frac{k-1}{p_1-1}\right] + \left[\frac{k}{2}\right]}{p_1}\right].$$

Für $p_1 = 3$ können wir statt (30) die Ungleichung

(30′) $\pi(2k-1) \geqq \pi(k-1) + \frac{k+1}{3}$

diskutieren. Wegen (29) ist $\pi(2k-1) \leqq 28$. Da $k \geqq 43$ zu $\pi(k-1) \geqq 13$ und zu $k \leqq 44$ führt, dürfen wir für k diese Schranke annehmen. Durch Wiederholung dieser Schlußweise können wir zeigen, daß aus $p_1 = 3$ und $k \geqq 12$ stets Widersprüche folgen. Für $p_1 = 5$ folgt

$$(31) \qquad \left[\frac{k-1}{p_1-1}\right] + \left[\frac{k}{2}\right] \leqq \left[\frac{k-1}{4}\right] + \left[\frac{k}{2}\right] \leqq \frac{3k-5}{4}.$$

Jetzt können wir statt (30) die Ungleichung

$$(30'') \qquad \pi\left(\frac{7k-5}{4}\right) \geqq \pi(k-1) + \frac{3k-1}{4} - \frac{7k-5}{20} = \pi(k-1) + \frac{2k}{5}$$

untersuchen. Wegen $\frac{7k-5}{4} < 2k-1$; $\frac{k-1}{3} \leqq \frac{2k}{5}$ für $5 \leqq k$ sehen wir, daß auch (30″) für $k \geqq 12$ zu Widersprüchen führt. Daher dürfen wir von nun an für alle $p_1 = 3$

$$(32) \qquad k \leqq 11$$

voraussetzen. Die Ungleichung (30″) liefert auch noch für kleinere k Widersprüche. Denn $\pi\,\frac{7k-5}{4} \leqq \pi(18) = 7$ führt für $k \geqq 8$ zu einem Widerspruch:

$$(33) \qquad 7 \geqq 4 + \frac{2k}{5}; \quad k \leqq 7 \text{ (für } p_1 \geqq 5).$$

Hieraus folgt nun weiterhin $\pi\left(\frac{7k-5}{4}\right) \leqq \pi(11) = 5$; aus $k \geqq 6$ folgt $5 \geqq 3 + \frac{2k}{5}$; $k \leqq 5$; also bleibt noch

$$(34) \qquad k \leqq 5, \text{ wenn } p_1 \geqq 5 \text{ gilt.}$$

Dann ist aber $g(p_1 \dots p_k) \leqq k + 2 \leqq k + 1 + \left[\frac{k-1}{p_1-1}\right] + \left[\frac{k}{2}\right]$ für $k > 1$; wegen $g(p_1) = 2 = k + 1$ *gilt* diese Ungleichung auch für $k \geqq 1$, d.h. für $p_1 \geqq 5$ ist Satz 2 bewiesen. Es sei noch bemerkt, daß im Fall $p_1 = 3$ aus (30′) für $k = 6, 8, 9$ die Widersprüche

$$(35) \qquad \begin{aligned} 5 &\geqq 3 + \tfrac{7}{3}; \\ 6 &\geqq 4 + 3; \\ 7 &\geqq 4 + \tfrac{10}{3}; \end{aligned}$$

folgen. In den verbleibenden Fällen lassen sich (bis auf die Ausnahmefälle) direkt Widersprüche zeigen. In den Ausnahmen haben wir

$$(36) \qquad \begin{aligned} &g(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot p_4 \cdot p_5) = 11 > 2k = g(3) \cdot g(5 \cdot 7 \cdot p_4 \cdot p_5); \\ &g(3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot p_6 \cdots p_{11}) = 23 > 2k = g(3) g(11 \cdot 13 \cdots p_{11}). \end{aligned}$$

Literatur

[1] ROSSER, J. – SCHOENFELD, L.: Approximate formulas for some functions of prime numbers. Illinois J. of Math. **6**, 64–94 (1962).

[2] KANOLD, H.-J.: Über eine zahlentheoretische Funktion von E. Jacobsthal. Abh. BWG **25**, 7–10 (1975).